ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ LAGRANGE)

Έστω η μη-ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (1)$$

και η αντίστοιχη ομογενής

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2)$$

Πρόβλημα: Να βρεθεί μια μερική λύση $y_p(x)$ της (1) υπό την προϋπόθεση ότι είναι γνωστές n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (2), έστω οι

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \dots, \quad y_n(x). \quad (3)$$

Μέθοδος επίλυσης: Θέτουμε

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \quad (4)$$

όπου $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ είναι άγνωστες διαφορίσιμες συναρτήσεις οι οποίες απαιτούμε να ικανοποιούν το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + \dots + c_n'(x)y_n''(x) &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \qquad (5) \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n)}(x) &= g(x)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα (5) έχει πάντοτε μια μοναδική λύση ως προς τις παραγώγους $c_i'(x) \quad (i = 1,2,\dots,n)$ αφού η ορίζουσά του είναι ακριβώς η ορίζουσα Wronski των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ της ομογενούς εξίσωσης (2). Έτσι οι άγνωστες συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ υπολογίζονται άμεσα με ολοκλήρωση ως προς x της μοναδικής λύσης του συστήματος (5) ενώ όλες οι προκύπτουσες σταθερές ολοκλήρωσης μπορούν να παραλειφθούν.

Σημείωση: Η παραπάνω μέθοδος εύρεσης μιας μερικής λύσης $y_p(x)$ της μη-ομογενούς εξίσωσης (1) οφείλεται στον Γάλλο μαθηματικό Joseph L. Lagrange (1713 –1813) και είναι πολύ γενική αφού δεν απαιτεί οι συντελεστές $a_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, της (1) να είναι σταθεροί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να βρεθεί μια μερική λύση των διαφορικών εξισώσεων:

1. $y''-2y'+y = x^{-1}e^x$.

2. $y''+y = \dfrac{1}{\sin x}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1. Από προηγούμενη παράγραφο, βρίσκουμε εύκολα ότι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x \quad . (1)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την μέθοδο του Lagrange, αναζητούμε μια μερική λύση της μη-ομογενούς στην μορφή

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x \quad , (2)$$

όπου οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων $c_1(x)$ και $c_2(x)$ θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} c_1'e^x + c_2'xe^x &= 0 \\ c_1'e^x + c_2'(e^x + xe^x) &= x^{-1}e^x \end{aligned} \quad . (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα (3) παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_1' &= -1 \\ c_2' &= 1/x \end{aligned}$$

και αφού ολοκληρώσουμε ως προς x (παραλείποντας παράλληλα τις σταθερές ολοκλήρωσης)

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -x \\ c_2(x) &= \ln x \end{aligned} .$$

Έτσι μια μερική λύση της δοθείσας μη-ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y_p(x) = -xe^x + x\ln x.$$

2. Εύκολα παρατηρούμε ότι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την μέθοδο του Lagrange, αναζητούμε μια μερική λύση της μη-ομογενούς στην μορφή

$$y_p(x) = c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x, \quad (2)$$

όπου οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων $c_1(x)$ και $c_2(x)$ θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\begin{gathered} c_1' \sin x + c_2' \cos x = 0 \\ c_1' \cos x - c_2' \sin x = \frac{1}{\sin x} \end{gathered}. \quad (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα (3) παίρνουμε

$$\begin{gathered} c_1' = \cot x \\ c_2' = -1 \end{gathered}$$

και αφού ολοκληρώσουμε ως προς x (παραλείποντας παράλληλα τις σταθερές ολοκλήρωσης)

$$\begin{gathered} c_1(x) = \ln|\sin x| \\ c_2(x) = -x \end{gathered}.$$

Έτσι μια μερική λύση της δοθείσας μη-ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y_p(x) = \ln|\sin x|\sin x - x\cos x.$$